

Kirsch 无限大平板问题

本模型基于《COMSOL 软件许可协议》 6.3 版本授权。
所有商标均为其各自所有者的财产。请参见 cn.comsol.com/trademarks。

简介

本例中，您将执行静态应力分析，以获得无限大平板中小孔附近的应力分布，其中计算了无限大平板的两个近似值，第一个使用尺寸相对于孔很大的有限平板，第二个使用无限元域。

此问题是一个经典基准模型，理论解由 G. Kirsch 于 1898 年推导得出。此模型的实现基于 D. Roylance 所著的 *Mechanics of Materials* 的 184 页描述的 Kirsch 平板模型 （参考资料 1），并将应力水平与理论值进行比较。

模型定义

在二维平面应力近似中将无限大平板模拟为 2 m * 2 m 的平板，板中间有一个半径为 0.1 m 的孔。由于载荷和几何结构的对称性，您只需分析四分之一的平板，参见图 1。选择足够大的板尺寸，这样孔附近的应力集中不会受到影响。

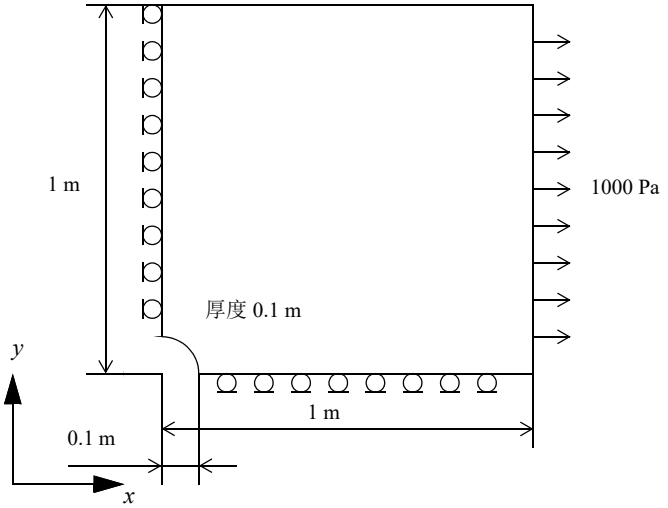


图 1：含定义对称平面的辊支承的 Kirsch 平板的几何模型。

使用无限元域对平板建模时，需要在板周围创建附加层。这些层模拟延伸到无限远的部分，并且可在延伸到无限远的方向具有任意长度，如 0.1 m。

在模型中，由于我们要将沿 $x = 0$ 对称平面的数值结果与解析参考值进行比较，且 x 方向的无限元域影响很小，因此仅沿 y 方向创建无限元域。

材料

材料为各向同性材料， $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Pa， $\nu = 0.3$。

载荷

右侧边上指向 x 方向的大小为 10^3 Pa 的分布应力。

约束

对称平面：$x = 0$， $y = 0$。

结果与讨论

图 2 和图 3 显示 x 方向上的正应力分布 σ_x。有限模型和无限模型的应力云图非常相似。

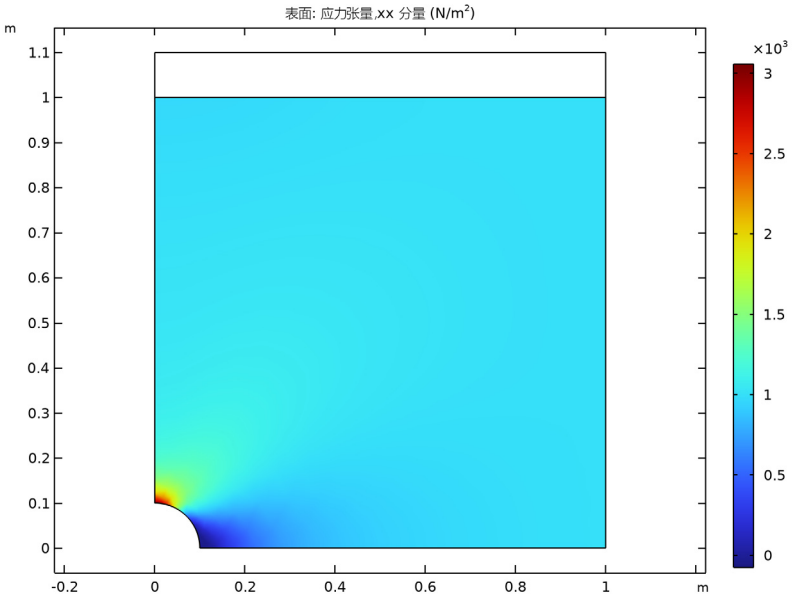


图 2：有限模型 x 方向的正应力分布。

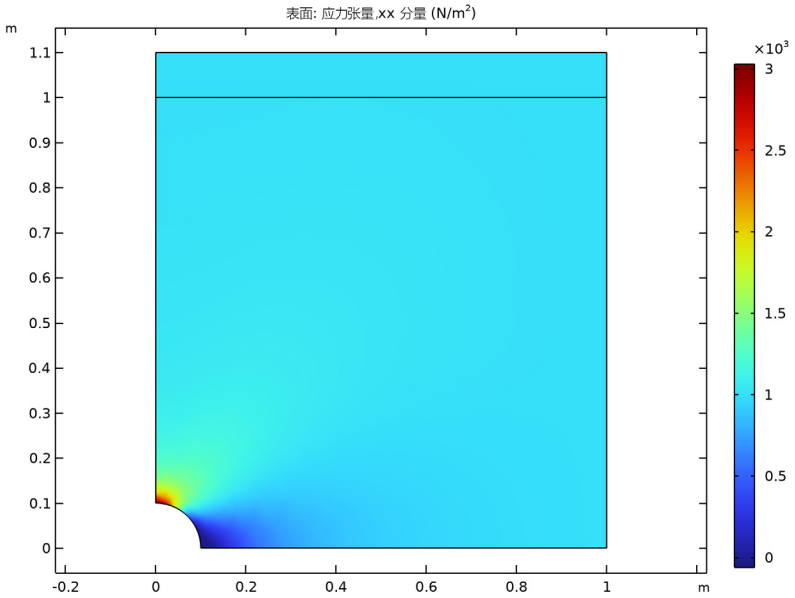


图 3：无限模型 x 方向的正应力分布。

根据参考资料 1，沿垂直对称线的应力 σ_x 可以由下式计算

$$\sigma_x = \frac{1000}{2}\left(2 + \frac{0.1^2}{y^2} + 3\frac{0.1^4}{y^4}\right) \qquad (1)$$

图 4 显示根据已求解模型获得的应力 σ_x，根据沿左侧对称边的实际 y 坐标来绘制，这与根据方程 1 得到的理论值非常一致。

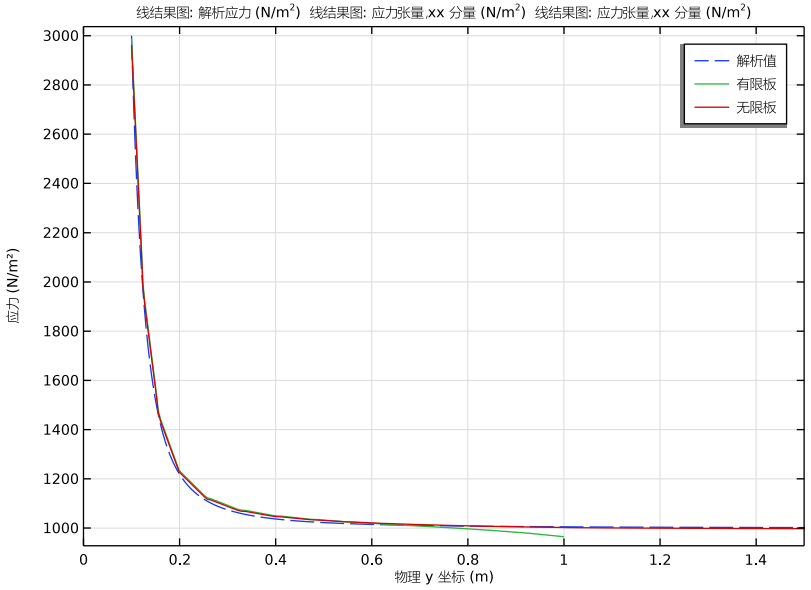


图 4：正应力，模拟结果（实线）与理论值（虚线）之间的比较。

在远离孔处，有限模型中的应力开始偏离理论值，而无限模型中的应力与理论值仍然非常匹配。

下表总结了应力误差：

表格 1：相对于解析解的应力误差。

	有限平板	**无限平板**
孔附近	1.1%	0.2%
远离孔处	-4.0%	-0.1%

COMSOL 软件功能实现说明

无限元域中的默认缩放函数是有理数，这种函数非常适合自由度数在无限远处消失为零的情况。此模型中载荷随边界一起趋于无限，这意味着应该存在恒定的应变和线性位移。要对无限区域的解使用这种缩放函数，首选多项式函数。拉伸坐标与几何坐标之间的关系为：

$$X_{\mathrm{m}} - X_0 = f\left(\frac{X - X_0}{\Delta X}\right)$$

其中函数 f 由解析函数定义。这里，我们希望 f 作为二阶多项式：$f(\xi) = a\xi^2 + b\xi + c$。$X_0$ 处的连续性条件 $f(0) = 0$ 以及域末端的 $f(1) = p_{\mathrm{w}}$ 意味着多项式为

$$f(\xi) = (p_{\mathrm{w}} - b)\xi^2 + b\xi$$

用矩形单元进行网格划分的情况下，无限元域可以获得最佳结果，参见图 5。

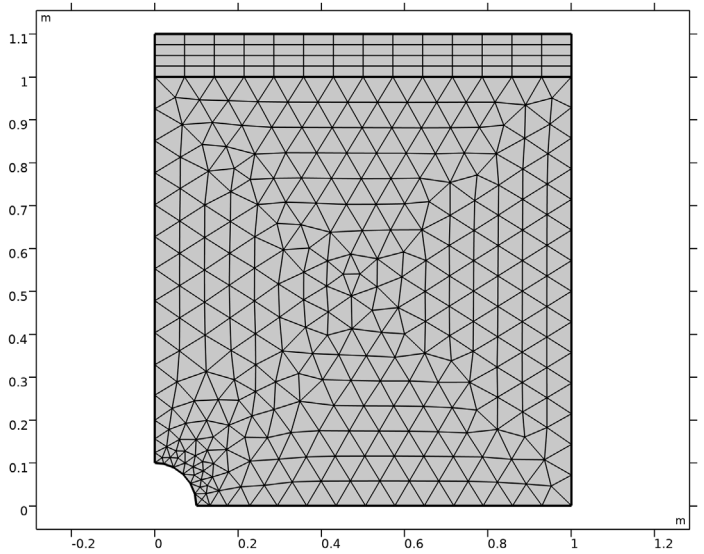


图 5：用矩形单元模拟的无限元域。

参考资料

1. D. Roylance, *Mechanics of Materials*, John Wiley & Sons, 1996.

案例库路径：`Structural_Mechanics_Module/Verification_Examples/kirsch_plate`

建模操作说明

从**文件**菜单中选择**新建**。

新建

在**新建**窗口中，单击 **模型向导**。

模型向导

1 在**模型向导**窗口中，单击 **二维**。

2 在**选择物理场**树中选择**结构力学** > **固体力学 (solid)**。

3 单击**添加**。

4 单击 **研究**。

5 在**选择研究**树中选择**一般研究** > **稳态**。

6 单击 **完成**。

全局定义

参数 1

1 在**模型开发器**窗口的**全局定义**节点下，单击**参数 1**。

2 在**参数**的**设置**窗口中，定位到**参数**栏。

3 在表中输入以下设置：

名称	表达式	值	描述
pw	10[m]	10 m	无限元域的物理宽度
deltaY	0.1[m]	0.1 m	无限元层的几何厚度

绘制一个包含顶层的矩形，该层表示无限元域。

几何 1

矩形 1 (r1)

1 在**几何**工具栏中单击 **矩形**。

2 在**矩形**的**设置**窗口中，定位到**大小和形状**栏。

3 在**高度**文本框中键入“1+deltaY”。

4 单击以展开**层**栏。清除**层在底面**复选框。

5 选中**层在顶面**复选框。

6 在表中输入以下设置：

层名称	厚度 (m)
层 1	deltaY

圆 1 (c1)

1 在**几何**工具栏中单击 **圆**。

2 在**圆**的**设置**窗口中，定位到**大小和形状**栏。

3 在**半径**文本框中键入 “0.1”。

4 单击 **构建选定对象**。

差集 1 (dif1)

1 在**几何**工具栏中单击**布尔操作和分割**，然后选择**差集**。

2 在**差集**栏中添加矩形并移除圆。

3 在**差集**的**设置**窗口中，单击 **构建所有对象**。

全局定义

首先根据 Kirsch 无限大平板的理论解添加应力解析函数。

解析应力

1 在**主屏幕**工具栏中单击 **函数**，然后选择**全局** > **解析**。

2 在**解析**的**设置**窗口中，在**标签**文本框中键入 “解析应力”。

3 在**函数名称**文本框中键入 “AnaStress”。

4 定位到**定义**栏。在**表达式**文本框中键入 “1000/2*(2+(0.1/y)^2+3*(0.1/y)^4)”。

5 在**变元**文本框中键入 “y”。

6 定位到**单位**栏。在表中输入以下设置：

变元	单位
y	m

7 在**函数**文本框中键入 “N/m^2”。

创建一个解析多项式函数来定义无限元域中的缩放比例。

定义

解析 2 (an2)

1 在**定义**工具栏中单击 **解析**。

2 在**解析**的**设置**窗口中，定位到**定义**栏。

3 在**表达式**文本框中键入 “(pw-10*deltaY)*x^2+10*deltaY*x”。

4 定位到**单位**栏。在表中输入以下设置：

变元	单位
x	m

5 在**函数**文本框中键入 “m”。

无限元域 1 (ie1)

1 在**定义**工具栏中单击 **无限元域**。

2 选择 “域” 2。

3 在**无限元域**的**设置**窗口中，定位到**缩放**栏。

4 从**坐标拉伸类型**列表中选择**用户定义**。

5 从**拉伸函数**列表中选择**解析 2 (an2)**。

添加一个表示物理上的 *y* 坐标的变量，用于后处理。

变量 1

1 在**模型开发器**窗口的**组件 1 (comp1)** 节点下，右键单击**定义**并选择**变量**。

2 在**变量**的**设置**窗口中，定位到**变量**栏。

3 在表中输入以下设置：

名称	表达式	单位	描述
ym	if(dom==2,ie1.Ym,y)	m	物理 y 坐标

固体力学 (SOLID)

首先建立一个不含**无限元域**的模型。

1 在**模型开发器**窗口的**组件 1 (comp1)** 节点下，单击**固体力学 (solid)**。

2 在**固体力学**的**设置**窗口中，定位到**域选择**栏。

3 在列表中选择 **2 (无限元)**。

4 单击 **从选择中移除**。

5 选择 “域” 1。

6 定位到**二维近似**栏。从列表中选择**平面应力**。

7 定位到**厚度**栏。在 *d* 文本框中键入 “0.1”。

对称 1

1 在**物理场**工具栏中单击 **边界**，然后选择**对称**。

2 选择 “边界” 1、 2 和 5。

边界载荷 1

1 在**物理场**工具栏中单击 **边界**，然后选择**边界载荷**。

2 选择 “边界” 6 和 7。

3 在**边界载荷**的**设置**窗口中，定位到**力**栏。

4 将 $\mathbf{f}_A$ 矢量指定为

1e3	x
0	y

现在建立一个包含无限元域的模型。

添加物理场

1 在**主屏幕**工具栏中，单击 **添加物理场**以打开**添加物理场**窗口。

2 转到**添加物理场**窗口。

3 在模型树中选择**结构力学** > **固体力学 (solid)**。

4 单击窗口工具栏中的**添加到 “组件 1”**。

5 在**主屏幕**工具栏中，单击 **添加物理场**以关闭**添加物理场**窗口。

固体力学 2 (SOLID2)

1 在**固体力学**的**设置**窗口中，定位到**二维近似**栏。

2 从列表中选择**平面应力**。

3 定位到**厚度**栏。在 *d* 文本框中键入 “0.1”。

对称 1

1 在**物理场**工具栏中单击 **边界**，然后选择**对称**。

2 选择 “边界” 1、 2 和 5。

边界载荷 1

1 在**物理场**工具栏中单击 **边界**，然后选择**边界载荷**。

2 选择 “边界” 6 和 7。

3 在**边界载荷**的**设置**窗口中，定位到**力**栏。

4 将 $\mathbf{f}_A$ 矢量指定为

1e3	x
0	y

材料

材料 1 (mat1)

1 在**模型开发器**窗口的**组件 1 (comp1)** 节点下，右键单击**材料**并选择**空材料**。

2 在**材料**的**设置**窗口中，定位到**材料明细**栏。

3 在表中输入以下设置：

属性	变量	值	单位	属性组
杨氏模量	E	2.1e11	Pa	杨氏模量和泊松比
泊松比	nu	0.3	1	杨氏模量和泊松比
密度	rho	7800	kg/m³	基本

网格 1

对于有限平板选择，必须使用定制的自由三角形网格才能在应力集中区域获得更精确的解。在预期的应力集中位置，设置较小的单元大小。

自由三角形网格 1

1 在**网格**工具栏中单击 **自由三角形网格**。

2 在**自由三角形网格**的**设置**窗口中，定位到**域选择**栏。

3 从**几何实体层**列表中选择**域**。

4 选择 “域” 1。

大小 1

1 右键单击**网格 1** 并选择**大小**。

2 在**大小**的**设置**窗口中，定位到**几何实体选择**栏。

3 从**几何实体层**列表中选择**点**。

4 选择 “点” 1。

5 定位到**单元大小**栏。单击**定制**按钮。

6 定位到**单元大小参数**栏。

7 选中**最大单元大小**复选框。在关联文本框中键入 “0.02”。

用矩形单元进行网格划分的情况下，无限元域可以获得更精确的结果。

映射 1

在**网格**工具栏中单击 **映射**。

分布 1

1 右键单击**映射 1**并选择**分布**。

2 选择“边界”2。

3 在**分布**的**设置**窗口中，定位到**分布**栏。

4 在**单元数**文本框中键入“4”。

5 单击 **全部构建**。

研究 1

在**研究**工具栏中单击 **计算**。

结果

为了检查计算结果的误差，针对含无限元域和不含无限元域的模型计算的解，对孔附近 ($y = 0.1$) 和远离孔处 ($y = 1$) 的应力执行点计算。可以通过找出计算的应力与解析应力之差来确定误差。

误差计算

1 在**结果**工具栏中单击 **点计算**。

2 在**点计算**的**设置**窗口中，在**标签**文本框中键入“误差计算”。

3 选择“点”1 和 2。

4 定位到**表达式**栏。在表中输入以下设置：

表达式	单位	描述
(solid.sx-AnaStress(y))/AnaStress(y)		有限板中的误差
(solid2.sx-AnaStress(y))/AnaStress(y)		无限板中的误差

5 单击 **计算**。

应力 (solid)

默认绘图显示 von Mises 应力和平板的已缩放变形。移除变形，改为显示 *x* 方向的应力场，因为外载荷为 x 方向。

表面 1

1 在**模型开发器**窗口中展开**应力 (solid)** 节点，然后单击**表面 1**。

2 在**表面**的**设置**窗口中，单击**表达式**栏右上角的**替换表达式**。从菜单中选择**组件 1 (comp1) > 固体力学 > 应力 > 应力张量（空间坐标系） - N/m² > solid.sGpxx - 应力张量，xx 分量**。

3 定位到**着色和样式**栏。从**颜色表**列表中选择 **Rainbow**。

变形

1 在**模型开发器**窗口中展开**表面 1** 节点。

2 右键单击**变形**并选择**删除**。

表面 1

1 在**模型开发器**窗口中展开**结果 > 应力 (solid2)** 节点，然后单击**表面 1**。

2 在**表面**的**设置**窗口中，单击**表达式**栏右上角的**替换表达式**。从菜单中选择**组件 1 (comp1) > 固体力学 2 > 应力 > 应力张量 （空间坐标系） - N/m² > solid2.sGpxx - 应力张量， xx 分量**。

3 定位到**着色和样式**栏。从**颜色表**列表中选择 **Rainbow**。

变形

1 在**模型开发器**窗口中展开**表面 1** 节点。

2 右键单击**变形**并选择**删除**。

应力曲线

1 在**结果**工具栏中单击 **一维绘图组**。

2 在**一维绘图组**的**设置**窗口中，在**标签**文本框中键入 “应力曲线”。

线结果图 1

1 右键单击**应力曲线**并选择**线结果图**。

2 选择 “边界” 1 和 2。

3 在**线结果图**的**设置**窗口中，定位到 **y 轴数据**栏。

4 在**表达式**文本框中键入 “AnaStress(ym)”。

5 定位到 **x 轴数据**栏。从**参数**列表中选择**表达式**。

6 在**表达式**文本框中键入 “ym”。

7 在**应力曲线**工具栏中单击 **绘制**。

8 单击以展开**图例**栏。从**图例**列表中选择**手动**。

9 选中**显示图例**复选框。

10 在表中输入以下设置：

图例
解析值

11 单击以展开**着色和样式**栏。找到**线样式**子栏。从**线**列表中选择**虚线**。

12 在**应力曲线**工具栏中单击 **绘制**。

线结果图 2

1 在**模型开发器**窗口中，右键单击**应力曲线**并选择**线结果图**。

2 选择 “边界” 1。

3 在**线结果图**的**设置**窗口中，单击 **y 轴数据**栏右上角的**替换表达式**。从菜单中选择**组件 1 (comp1) > 固体力学 > 应力 > 应力张量 （空间坐标系） - N/m² > solid.sGpxx - 应力张量， xx 分量**。

4 定位到 **x 轴数据**栏。从**参数**列表中选择**表达式**。

5 在**表达式**文本框中键入 “y”。

6 定位到**图例**栏。选中**显示图例**复选框。

7 从**图例**列表中选择**手动**。

8 在表中输入以下设置：

图例
有限板

线结果图 3

1 右键单击**应力曲线**并选择**线结果图**。

2 选择 “边界” 1 和 2。

3 在**线结果图**的**设置**窗口中，单击 **y 轴数据**栏右上角的**替换表达式**。从菜单中选择**组件 1 (comp1) > 固体力学 2 > 应力 > 应力张量 （空间坐标系） - N/m² > solid2.sGpxx - 应力张量， xx 分量**。

4 定位到 **x 轴数据**栏。从**参数**列表中选择**表达式**。

5 在**表达式**文本框中键入 “ym”。

6 定位到**图例**栏。选中**显示图例**复选框。

7 从**图例**列表中选择**手动**。

8 在表中输入以下设置：

图例
无限板

应力曲线

1 在**模型开发器**窗口中，单击**应力曲线**。

2 在**一维绘图组**的**设置**窗口中，定位到**轴**栏。

3 选中**手动轴限制**复选框。

4 在 **x 最小值**文本框中键入 “0”。

5 在 **x 最大值**文本框中键入 “1.5”。

6 定位到**绘图设置**栏。

7 选中 **x 轴标签**复选框。在关联文本框中键入 “物理 y 坐标 (m)”。

8 选中 **y 轴标签**复选框。在关联文本框中键入 “应力 (N/m²)”。

9 在**应力曲线**工具栏中单击 **绘制**。